IV Congreso de Jóvenes Investigadores
Real Sociedad Matemática Española
Valencia, 4-8 de septiembre de 2017

Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos. De la teoría a las aplicaciones

S. Fernández-García*

La comunidad de sistemas dinámicos actual se interesa cada vez más por el estudio de sistemas no suaves (no diferenciables), en los que la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales no se puede aplicar. Esto se debe, entre otras razones, a la utilidad de este tipo de sistemas para reproducir fenómenos que son, de manera natural, no suaves (el impacto de un cuerpo rígido, la conmutación en control eléctrico de circuitos y robótica, etc.). Una clase interesante de este tipo de sistemas son los sistemas lineales a trozos (PWL, por sus siglas en inglés). Los primeros ejemplos de sistemas PWL aparecieron en el libro seminal de Andronov et al. [1], para modelar problemas de naturaleza electrónica, mecánica, y sistemas de control (utilizando funciones de saturación, conmutación, etc.). Desde entonces, la capacidad de los sistemas PWL para reproducir fenómenos de diferente naturaleza ha sido ampliamente demostrada [7]. Además, los sistemas PWL se conocen por sus capacidad para reproducir aspectos de los sistemas no lineales en general, y el hecho de que se tenga acceso a la solución explícita en las diferentes zonas de linealidad hace posible describir explícitamente algunos elementos dinámicos y geométricos del sistema. Sin embargo, no es posible obtener una solución general ni aplicar la teoría clásica de los sistemas dinámicos, por lo que es necesario estudiarlos de una manera diferente.

En esta charla nos centraremos en el estudio de las órbitas periódicas en sistemas PWL, comenzando desde un punto de vista más teórico, para terminar tratando problemas más aplicados. En la primera parte de la charla, presentaremos una generalización de la teoría de Melnikov para el estudio de la existencia de órbitas periódicas en sistemas no suaves, y aplicaremos los resultados a sistemas PWL [3, 4]. Después, nos centraremos en aspectos más aplicados de los sistemas PWL. Es bien conocido que muchos modelos neuronales asumen que la neurona se comporta en primera aproximación como un circuito electrónico, los cuales, como ya se ha comentado, han sido fielmente reproducidos por modelos PWL. Por otro lado, los modelos neuronales se caracterizan por tener, intrínsecamente, diferentes escalas temporales, y fenómenos tipo *canard* (crecimiento exponencial de la amplitud de un ciclo límite en un rango de parámetros exponencialmente pequeño) han sido ampliamente estudiados en el contexto de los sistemas suaves, desde 1981, ver [2, 8, 9, 12]. Trataremos en esta segunda parte de la charla sobre los ciclos límite tipo canard en sistemas PWL, los cuales nos permiten ir más allá en la comprensión del fenómeno [6, 10, 13]. Para terminar, mostraremos un ejemplo concreto de aplicación de los sistemas PWL en el contexto de la neuroendocrinología. En particular, presentaremos el modelo estudiado en [11], el cual es una versión PWL del sistema considerado en [5] para reproducir los patrones de secreción de la neurohormona gonadotropina en mamíferos hembra. La versión PWL nos permite mantener la riqueza dinámica del sistema, teniendo mejor acceso a aspectos cuantitativos del modelo.

Agradecimientos Esta investigación ha sido financiada por Universidad de Sevilla VPPI-US y parcialmente financiada por Proyectos de Excelencia de la Junta de Andalucía P12-FQM-1658 y Ministerio de Economía y Competitividad MTM-2014-54275P, MTM2015-64577-C2-1-R.

Referencias

[1] A. Andronov, A. Vitt, S. Khaikin. *Theory of oscillators*. Pergamon Press, Oxford, 1966.

[2] E.Benoît, J.-L. Callot, F. Diener, M. Diener. *Chasse au Canard*. Collect Math. **32** (1981) 37-119.

[3] V. Carmona, S. Fernández-García, E. Freire. *Saddle-node bifurcation of invariant cones in 3D piecewise linear systems*. Physica D: Nonlinear Phenomena **241** (2012) 623-635.

[4] V. Carmona, S. Fernández-García, E. Freire, F. Torres. *Melnikov Theory for a Class of Planar Hybrid Systems*. Physica D: Nonlinear Phenomena **248** (2013) 44-54.

[5] F. Clément, J.-P. Françoise. *Mathematical Modeling of the GnRH Pulse and Surge Generator*. SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **5** (2007) 441-456.

*Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, C/ Tarfia, s/n, 41012 Sevilla, Email: soledad@us.es

[6] M. Desroches, E. Freire, S. J. Hogan, E. Ponce, P. Thota. *Canards in piecewise-linear systems: explosions and super-explosion*. Proc R Soc A. **469** (2013) (2154):20120603.

[7] M. di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys, P. Kowalczyk. *Piecewise-smooth dynamical systems. Theory and applications, Springer-Verlag London*, London, 2008.

[8] F. Dumortier, R. Roussarie. *Canard cycles and center manifolds*. Providence (RI): AMS **121** 1996.

[9] W. Eckhaus. *Standard chase on French Ducks*. Lect Notes Math. **985** (1983) 449-494.

[10] S. Fernández-García, M. Desroches, M. Krupa, A. E. Teruel. *Canard solutions in planar piecewise linear systems with three zones*. Dyn. Syst. **31** (2016) 173-197.

[11] S. Fernández-García, M. Desroches, M. Krupa, F. Clément. *A multiple time scale coupling of piecewise linear oscillators. Application to a Neuroendocrine System*. SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **14** (2015) 643-673.

[12] M. Krupa, P. Szmolyan. *Relaxation oscillation and canard explosion.* J. Differ. Equations. **174** (2001) 312-368.

[13] H. G. Rotstein, S. Coombes, A.M. Gheorghe. *Canard-like explosion of limit cycles in twodimensional piecewise-linear models of FitzHugh-Nagumo type*. SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **11** (2012) 135-180.