IV Congreso de Jóvenes Investigadores
Real Sociedad Matemática Española
Valencia, 4-8 de septiembre de 2017

Construcciones conjugadas para superficies de curvatura media constante

José M. Manzano*

Las superficies con curvatura media constante (CMC en lo sucesivo) y, en particular, las superficies mínimas, para las que esta constante es cero, son objetos de gran interés en la teoría de superficies en espacios tridimensionales. Este interés proviene principalmente de que tales superficies modelan fenómenos de naturaleza física y, a la vez, revelan propiedades geométricas y topológicas de las 3-variedades que las contienen. Por ejemplo, el problema de Plateau, que busca superficies mínimas con borde prefijado, tiene solución bajo hipótesis muy débiles y puede entenderse como un modelo matemático para las películas que se forman al sumergir alambres en agua jabonosa. Una colección de representaciones numéricas de superficies mínimas distinguidas puede encontrarse en la galería de Matthias Weber: `http://www.indiana.edu/~minimal/archive/`.

El estudio de las superficies con CMC es una de las ramas más relevantes del Análisis Geométrico, donde se combinan técnicas de Geometría Diferencial con otras puramente analíticas como son el Cálculo de Variaciones, las EDPs elípticas y parabólicas, el Análisis Complejo o la Teoría de la Medida. Las distintas construcciones de superficies con CMC también han seguido caminos bastante dispares, si bien la técnica más fructífera para la obtención de ejemplos con un alto grado de simetría es la conocida como *construcción de Plateau conjugada*. Esencialmente, ésta consiste en los siguientes pasos:

1. Encontrar una superficie mínima que resuelva el problema de Plateau con borde un polígono geodésico adecuado en una 3-variedad adecuada.

2. Aplicar una transformación que convierta dicha superficie mínima en otra superficie CMC, posiblemente en un espacio ambiente distinto.

3. Extender la superficie resultante mediante isometrías del espacio ambiente para obtener una superficie sin borde.

Estas construcciones, originalmente ideadas por Lawson [3] para obtener las primeras superficies con CMC doblemente periódicas en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ a partir de superficies mínimas en la 3-esfera $\mathbb{S}^3$, han sido utilizadas por numerosos autores y, más recientemente, han cobrado relevancia en la construcción de pares de superficies mínimas conjugadas en $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, el producto del plano hiperbólico y la recta real, del mismo modo que el helicoide y la catenoide son superficies mínimas conjugadas en $\mathbb{R}^3$.

El objetivo de esta charla es generalizar estas ideas para construir superficies con CMC en los espacios producto $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$. A tal efecto, usaremos una extensión dada por Daniel [2] de la correspondencia de Lawson para superficies con CMC en espacios homogéneos con grupo de isometrías de dimensión 4. Concretamente, resolviendo el problema de Plateau en el espacio de Heisenberg $\mathrm{Nil}_3(\frac{1}{2})$ obtendremos superficies con CMC $H=\frac{1}{2}$ en $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$. Si lo resolvemos en $\widetilde{\mathrm{Sl}}_2(\mathbb{R})$, el recubridor universal del grupo especial lineal con una cierta métrica invariante a izquierda, obtendremos superficies con CMC $0<H<\frac{1}{2}$ en $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$. Finalmente, si lo resolvemos en ciertas esferas de Berger, obtendremos superficies con CMC $H>\frac{1}{2}$ (resp. $H>0$) en $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$).

La dificultad de las construcciones conjugadas estriba en encontrar el polígono adecuado para que la superficie objetivo tenga las propiedades buscadas (usualmente simetrías prefijadas, embebimiento, topología controlada, número y tipo de finales,...). Esta dificultad proviene de que tanto la solución al problema de Plateau como la correspondencia de Daniel no son explícitas y es necesario vincular las propiedades de la superficie objetivo con elementos del polígono original. En los espacios homogéneos arriba mencionados existe una noción natural de dirección vertical (tangente a un campo de Killing distinguido) y dirección horizontal (ortogonal a la dirección vertical) que nos ayudará en esta tarea: la correspondencia de Daniel

*Department of Mathematics, King's College London, Strand WC2R 2SL, London. Email: manzanoprego@gmail.com

conserva el ángulo que forma la superficie con la dirección vertical y transforma geodésicas verticales (resp. horizontales) en curvas contenidas en planos horizontales (resp. verticales).

Aplicaremos estas ideas sobre construcciones concretas, enfatizando las dificultades técnicas asociadas a cada una de ellas:

- Superficies de tipo Delaunay (unduloides, nodoides y cilindros) horizontales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con CMC $H > \frac{1}{2}$ y con CMC $H > 0$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Obtenemos los primeros ejemplos no triviales de superficies compactas con CMC $H > 0$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (con la topología de un toro), véase [5].
- Superficies compactas y embebidas con CMC $0 < H < \frac{1}{2}$ de género arbitrario en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, veáse [6].
- Superficies mínimas de tipo Schwarz-P en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, así como superficies mínimas, compactas y embebidas con característica de Euler par (orientables y no orientables) en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ para radio r pequeño, véase [4]. En este artículo probamos, asimismo, que no existen superficies mínimas compactas y embebidas en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1(r)$ con característica de Euler impar.
- Superficies embebidas con CMC $0 < H < H_0$ (para cierto $H_0 > \frac{1}{2}$) en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con las mismas simetrías que una teselación de $\mathbb{H}^2$ por polígonos regulares, veáse [6].
- Superficies tipo *saddle tower* con CMC $0 < H < \frac{1}{2}$, así como k-noides horizontales con CMC $0 < H < \frac{1}{2}$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con género cero y número arbitrario de finales ($k \geq 2$) asintóticos a cilindros verticales, véase [1].

Referencias

[1] B. Coskunuzer, J. M. Manzano, G. Tinaglia. Saddle towers and k-noids with constant mean curvature $0 < H < \frac{1}{2}$ in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Preprint* (2017).

[2] B. Daniel. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.*, **82** (2007), no. 1, 87–131.

[3] H. B. Lawson. Complete minimal surfaces in S^3. *Ann. of Math. (2)*, **92** (1970), 335–374.

[4] J. M. Manzano, J. Plehnert, F. Torralbo. Compact embedded minimal surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. *Comm. Anal. Geom.*, **24** (2016), no. 2, 409–429.

[5] J. M. Manzano, F. Torralbo. New examples of constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Michigan Math. J.*, **63** (2014), no. 4, 701–723.

[6] J. M. Manzano, F. Torralbo. Compact embedded surfaces and horizontal Delaunay surfaces with constant mean curvature in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Preprint* (2017).